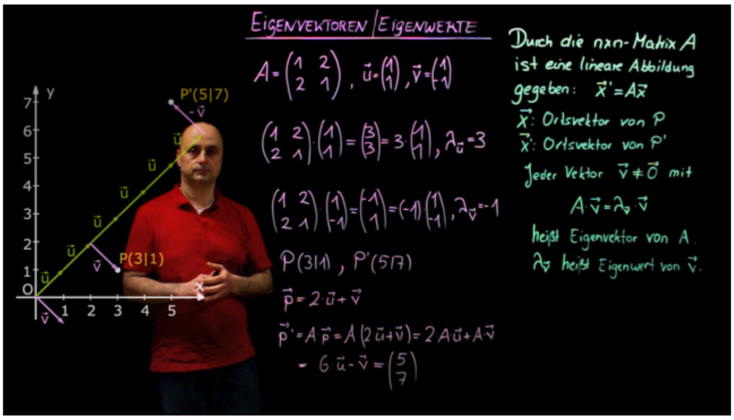
Arbeitsblätter zum Ausdrucken von sofatutor.com

# Eigenwerte und Eigenvektoren




1 **Beschreibe, wie der Bildpunkt $P'$ des Punktes $P(3|1)$ bestimmt werden kann.**

2 Gib an, was ein Eigenvektor und was ein Eigenwert ist.

3 Berechne die Eigenwerte bei gegebenen Eigenvektoren.

4 Leite die Eigenwerte der Matrix $A$ her.

5 Bestimme die Eigenvektoren der Matrix $A$.

6 Prüfe die folgenden Aussagen.

+ mit vielen Tipps, Lösungsschlüsseln und Lösungswegen zu allen Aufgaben

# Beschreibe, wie der Bildpunkt $P'$ des Punktes $P(3|1)$ bestimmt werden kann.

Verbinde die Elemente miteinander.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};\ \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $A$ sowie zwei Eigenvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind gegeben.

$\lambda_{\vec{u}} = 3$ ist der Eigenwert von $A$ zu dem Eigenvektor $\vec{u}$ und $\lambda_{\vec{v}} = -1$ der Eigenwert zu dem Eigenvektor $\vec{v}$.

- **A** Der Ortsvekor des Punktes $P(3|1)$ lässt sich als Linearkombination der Eigenvektoren darstellen:
- **B** Der Ortsvektor des Bildpunktes ist gegeben durch Multiplikation der Matrix $A$ mit dem Ortsvektor von $P$:
- **C** Nun kann die Linearkombination des Ortsvektors von $P$ verwendet werden:
- **D** Es gilt
- **E** Mit dem bekannten Eigenwerten ist der Ortsvektor des Bildpunktes

1. $A \cdot (2 \cdot \vec{u} + \vec{v}) = 2 \cdot A \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{v}.$
2. $\vec{p}\,' = 2 \cdot 3 \cdot \vec{u} - \vec{v} = 6 \cdot \vec{u} - \vec{v}.$
3. $\vec{p} = 2 \cdot \vec{u} + \vec{v}.$
4. $\vec{p}\,' = A \cdot (2 \cdot \vec{u} + \vec{v}).$
5. $\vec{p}\,' = A \cdot \vec{p}.$

# Unsere Tipps für die Aufgaben

1 von 6

## Beschreibe, wie der Bildpunkt $P'$ des Punktes $P(3|1)$ bestimmt werden kann.

**1. Tipp**

Der Bildpunkt ist $P'(5|7)$.

---

**2. Tipp**

$$A \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = A \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{v}$$

Beachte, dass du das Distributivgesetz auch bei der Multiplikation von Matrizen mit Vektoren anwenden darfst.

---

## Lösungen und Lösungswege für die Aufgaben

1
von 6

### Beschreibe, wie der Bildpunkt $P'$ des Punktes $P(3|1)$ bestimmt werden kann.

**Lösungsschlüssel:** A—3 // B—5 // C—4 // D—1 // E—2

In diesem Beispiel wird gezeigt, wie mit Eigenwerten und Eigenvektoren gerechnet werden kann.

Es soll der Bildpunkt $P'$ des Punkes $P(3|1)$ bestimmt werden.

Zunächst wird der Ortsvektor von $P$ als Linearkombination der beiden Eigenvektoren geschrieben:

$$\vec{p} = 2 \cdot \vec{u} + \vec{v}.$$

Damit ist der Ortsvektor des Bildpunktes wie folgt gegeben:

$$\vec{p}' = A \cdot \vec{p} = A \cdot (2 \cdot \vec{u} + \vec{v}).$$

Unter Verwendung des Distributivgesetzes erhält man

$$\vec{p}' = 2 \cdot A \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{v}.$$

Jetzt kommen die bekannten Eigenwerte der Eigenvektoren ins Spiel:

$$\vec{p}' = 2 \cdot 3 \cdot \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v} = 6 \cdot \vec{u} - \vec{v}.$$

Zuletzt werden die Eigenvektoren eingesetzt:

$$\vec{p}' = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 6-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Der Bildpunkt von $P(3|1)$ ist $P'(5|7)$.