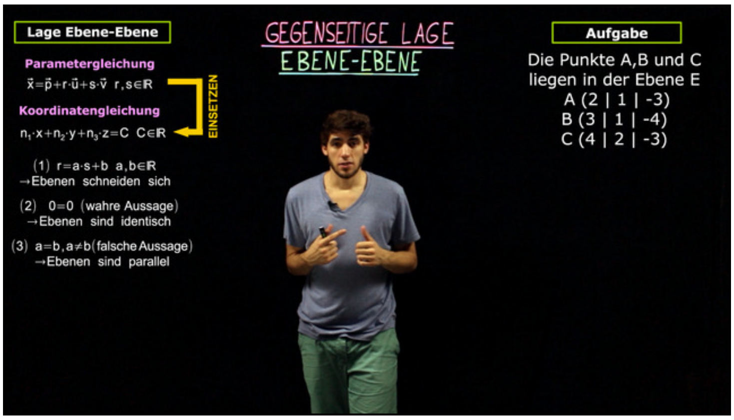
Arbeitsblätter zum Ausdrucken von sofatutor.com

Gegenseitige Lage Ebene-Ebene – Beispiele



1 **Bestimme die richtigen Aussagen zur Lagebeziehung zweier Ebenen.**

2 Stelle die Lagebeziehung der Ebenen E und F dar.

3 Gib die gegenseitige Lage zwischen den Ebenen E und G an.

4 Ermittle die gegenseitige Lage zwischen der Ebene E und den Ebenen F, G, H und I.

5 Entscheide, welche der Aussagen zur gegenseitigen Lage von Ebenen korrekt sind.

\+ mit vielen Tipps, Lösungsschlüsseln und Lösungswegen zu allen Aufgaben

Bestimme die richtigen Aussagen zur Lagebeziehung zweier Ebenen.

Wähle die entsprechenden Aussagen dazu aus.

Überlege dir gut, welche der Aussagen **wahr** und welche **falsch** sind. Mache dir dazu gegebenenfalls Notizen und versuche nicht alles im Kopf zu lösen.

☐ **A** Die Gleichung $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ mit $r, s \in$ R nennt man auch Koordinatengleichung.

☐ **B** Eine Parametergleichung einer Ebene kann man zeilenweise notieren und die erste Zeile für die x-Koordinate, die zweite Zeile für die y-Koordinate und die dritte Zeile für die z-Koordinate der Ebenengleichung $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = C$ mit $C \in$ R einsetzen.

☐ **C** Erhält man nach einigen Umformungsschritten $0 = 0$ bzw. eine wahre Aussage, dann sind die betrachteten Ebenen identisch.

☐ **D** Sind $A = (2, 1, -3), B = (3, 1, -4)$ und $C = (4, 2, -3)$, dann ist $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Ebenengleichung, die durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannt wird.

Unsere Tipps für die Aufgaben

1
von 5

Bestimme die richtigen Aussagen zur Lagebeziehung zweier Ebenen.

1. Tipp

Eine Koordinatengleichung hat die Form $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = C$ mit $C \in$ R.

---

2. Tipp

$$M:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es sind $A = (2,2,-1), B = (3,5,-2)$ und $C = (-4,1,0)$. Die Ebene M wird durch die Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannt, denn es ist

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5-2 \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ 1-2 \\ 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen und Lösungswege für die Aufgaben

1 von 5

Bestimme die richtigen Aussagen zur Lagebeziehung zweier Ebenen.

Lösungsschlüssel: B, C

1. „*Die Gleichung $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ mit $r, s \in$ R nennt man auch Koordinatengleichung.*"
Die Gleichung $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ mit $r, s \in$ R nennt man insbesondere wegen der Parameter r und s auch Parametergleichung. Eine Koordinatengleichung hat die Form $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = C$ mit $C \in$ R. Die Aussage ist also **falsch**.

2. „*Eine Parametergleichung einer Ebene kann man zeilenweise notieren und die erste Zeile für die x-Koordinate, die zweite Zeile für die y-Koordinate und die dritte Zeile für die z-Koordinate der Ebenengleichung $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = C$ mit $C \in$ R einsetzen.*"

Eine beliebige Parametergleichung einer Ebene besitzt die Form $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$. Der Vektor $\vec{x}$ selbst besitzt drei Koordinaten, die man üblicherweise mit x_1, x_2 und x_3 oder, sofern Verwechslungen ausgeschlossen werden können, mit x, y und z bezeichnet. Die Vektoren $\vec{p}, \vec{u}$ und $\vec{v}$ lassen sich ebenfalls mit ihren drei Einträgen schreiben. Die Parametergleichung kann man also auch folgendermaßen notieren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Jetzt kann man die Gleichung zeilenweise aufschreiben, d.h. wir erhalten

$$\begin{aligned} x &= p_1 + r \cdot u_1 + s \cdot v_1 \\ y &= p_2 + r \cdot u_2 + s \cdot v_2 \\ z &= p_3 + r \cdot u_3 + s \cdot v_3 \end{aligned}$$

Nun können wir ganz einfach den Term für x, y und z in die Ebenengleichung $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = C$ mit $C \in$ R einsetzen. Die Aussage ist also **wahr**.

3. „*Erhält man nach einigen Umformungsschritten $0 = 0$ bzw. eine wahre Aussage, dann sind die betrachteten Ebenen identisch.*"

Ist E eine beliebige Ebene in Parameterform und F eine Ebene in Koordinatenform. Dann kann man E in F wie in 2.) beschrieben einsetzen und man erhält eine Gleichung. Diese Gleichung lässt sich durch geeignete Umformungsschritte vereinfachen. Kommt man dabei zu einer wahren Aussage, wie z.B. $0 = 0$ oder $13 = 13$ o.ä., dann sind die Ebenen E und F identisch. Die Aussage ist also **wahr**.

4. „*Sind $A = (2, 1, -3), B = (3, 1, -4)$ und $C = (4, 2, -3)$, dann ist $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Ebenengleichung, die durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannt wird.*"

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ berechnen sich wie folgt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-1 \\ -4-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-1 \\ -3-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und der zweite Spann- oder Richtungsvektor von E nicht gleich bzw. kein Vielfaches voneinander sind, spannen die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ die Ebene E nicht auf. Die Aussage ist damit **falsch**.